SANATA DHARMA CALCULUS LEAGUE

UNIVERSITAS SANATA DHARMA, YOGYAKARTA

Minggu, 28 November 2021

BABAK FINAL

Petunjuk Teknis dan Penilaian:

1. Babak final diikuti oleh 5 finalis dengan nilai tertinggi pada babak semifinal.
2. Soal di babak final ini terdiri dari 2 soal uraian dan total waktu pengerjaan adalah 60 menit.
3. Setiap finalis dilarang bekerja sama (memberi dan menerima bantuan) dengan siapa pun dalam bentuk apa pun.
4. Gunakan pena atau pulpen untuk menulis jawaban/penyelesaian.
5. Untuk setiap soal gunakan 1 lembar kertas jawaban secara terpisah.
6. Setiap lembar jawaban discan dan diupload satu per satu sesuai dengan nomor pada sistem yang telah disediakan.
7. Peserta wajib menuliskan nama lengkap peserta dan nama perguruan tinggi di setiap lembar jawaban.
8. Dewan juri terdiri dari 2 orang yang telah ditetapkan panitia.
9. Penentuan juara pada babak final didasarkan pada total hasil penilaian pada babak final. Setiap soal mempunyai skor maksimal 50.
10. Keputusan dewan juri bersifat mutlak dan tidak dapat diganggu gugat.

SOAL

1. Fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan **menarik** jika terdapat $c \in \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \neq f(c)$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a \neq b$.

(a) Berikan salah satu contoh fungsi menarik.

(b) Jika f menarik pada $\mathbb{R}$, tunjukkan bahwa f memiliki titik kritis.

2. Diberikan $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ suatu fungsi yang kontinu pada selang terbuka $(-1,1)$ sedemikian hingga

$$\int_{-\frac{1}{2021}}^{\frac{1}{2021}} f(t)\,dt = 1, \quad \int_{-\frac{1}{2021}}^{\frac{1}{2021}} tf(t)\,dt = \frac{1}{2}, \quad \int_{-\frac{1}{2021}}^{\frac{1}{2021}} t^2 f(t)\,dt = \frac{1}{4},$$

dan demikian seterusnya sehingga untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\int_{-\frac{1}{2021}}^{\frac{1}{2021}} t^n f(t)\,dt = \frac{1}{2^n}.$$

Buktikan bahwa terdapat bilangan real $x \in (-1,1)$ sedemikian sehingga $f(x) + 2021x = 2021$.