

**SOAL BABAK PENYISIHAN
SANATA DHARMA CALCULUS LEAGUE 2020**

1. Luas daerah di bidang Cartesius yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi

$$|x| + |y| + |x + y| \leq 2$$

adalah ...

- (a) 3
- (b) 4
- (c) $\frac{9}{2}$
- (d) 6

2. Diberikan fungsi

$$f(x) = \frac{14x - 11}{2020x - a}$$

yang didefinisikan untuk setiap bilangan real x dengan $x \neq \frac{a}{2020}$. Nilai a sehingga $f^{-1}(x) = f(x)$ adalah ...

- (a) 14
- (b) 11
- (c) 2020
- (d) tidak ada

3. Jika

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{1 - x^2}{1 - x} = a \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 4}{x + 2} = p,$$

maka nilai dari $a + p$ adalah ...

- (a) 5
- (b) 6
- (c) 11
- (d) 30

4. Nilai $a + b$ yang memenuhi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^3 + bx^2 + 2020} - \sqrt{2019x - 1} \right) = L,$$

dengan $L < \infty$, adalah ...

- (a) 2017
- (b) 2018
- (c) 2019
- (d) 2020

5. Jika fungsi

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 - a & , x < -2 \\ 2x & , -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{ax+b}{x^2-1} & , x > 1 \end{cases}$$

kontinu pada \mathbb{R} , maka nilai $a^2 + b^2 + c^2$ adalah ...

- (a) 32
 - (b) 36
 - (c) 12
 - (d) 8
6. Misalkan $p(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ merupakan komposisi dari fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Turunan fungsi g yang ditranslasi 1 satuan ke kanan adalah ...
- (a) $2x - 1$
 - (b) $2x - 2$
 - (c) $2x + 2$
 - (d) $2x$

7. Jika $y = x + 2$ merupakan garis singgung dari fungsi f di titik $(-1, 1)$, maka fungsi di bawah ini yang tidak memenuhi f adalah ...

- (a) $f(x) = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$
- (b) $f(x) = -\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + 1$
- (c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$
- (d) $f(x) = \frac{1}{\pi} \cos(\frac{\pi}{2}x) + 1$

8. Diketahui kurva

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2k}{kx}, \quad k \neq 0,$$

naik monoton pada selang $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Asimtot miring kurva tersebut memotong sumbu x di titik ...

- (a) $(-2, 0)$
- (b) $(-1, 0)$
- (c) $(1, 0)$
- (d) $(2, 0)$

9. Diketahui bahwa jari-jari alas dan tinggi sebuah kerucut berubah terhadap waktu tetapi volumenya selalu tetap sebesar $\frac{4}{3}\pi m^3$. Laju perubahan jari-jari kerucut pada saat tingginya sebesar 1 m, apabila pada saat itu tingginya berkurang dengan laju 0,5 m/detik adalah ...

- (a) 1 m/detik
- (b) 2 m/detik
- (c) 0,25 m/detik
- (d) 0,5 m/detik

10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 6e^{-2x} + 15e^{-x} - 10}{\cos(4x) - 3\sin(2x) + 8x^2 + 6x - 1} = \dots$$

- (a) 5
- (b) $\frac{5}{2}$
- (c) $\frac{3}{2}$
- (d) tidak ada

11. Jika diketahui $F'(x) = f(x)$, maka

$$\int_0^\pi \cos(3x) f(2 + \sin(3x)) dx = \dots$$

- (a) $\frac{1}{3}F(2)$
- (b) 0
- (c) $\frac{1}{3}(F(\pi) - F(0))$
- (d) 1

12. Nilai integral fungsi $f(x) = \cos^3(ax) \sin(2ax)$ pada interval $[0, \frac{\pi}{4}]$ adalah $\frac{2}{5}$. Nilai a yang memenuhi adalah ...

- (a) $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$

- (b) $\{2, 4, 6, \dots\}$
- (c) $\{2, 6, 10, \dots\}$
- (d) $\{6, 12, 18, \dots\}$

13. Diketahui $f(2017) = -2$, $f'(2017) = 1$, dan $f(a) = f'(a)$ untuk setiap $a \neq 2017$. Jika

$$\int_{2017}^{2020} x f''(x) dx = 0$$

dengan $f''(x)$ merupakan fungsi yang kontinu pada interval $[2017, 2020]$, maka nilai $f(2020)$ adalah ...

- (a) -2
 - (b) 0
 - (c) 1
 - (d) 2
- 14.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \dots$$

- (a) $\frac{1}{2}$
 - (b) $\frac{1}{2} \ln 2$
 - (c) $\ln 2$
 - (d) 0
15. Luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x , sumbu y , garis $y + x = 3$, dan kurva $y = x^2 + 1$ adalah ...
- (a) $\frac{20}{3}$
 - (b) $\frac{10}{3}$
 - (c) $\frac{7}{2}$
 - (d) $\frac{2}{3}$
16. Diketahui S adalah area di kuadran pertama yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = ax$, dengan a suatu bilangan real positif. Jika volume benda putar yang terbentuk dari area S yang diputar mengelilingi sumbu x sama dengan volume benda putar yang terbentuk dari area S yang diputar mengelilingi sumbu y , maka nilai $a = \dots$

- (a) $\frac{4}{3}$
- (b) $\frac{3}{5}$
- (c) $\frac{5}{4}$
- (d) 1

17. Misalkan luas daerah di bawah kurva $y = \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$ pada interval $[11, 14]$ adalah L satuan luas. Jika panjang busur kurva $f(x)$ sepanjang interval $[a, 14]$ dengan $a \geq 2$ sama dengan L satuan panjang, maka nilai a adalah ...

- (a) 2
- (b) 5
- (c) 7
- (d) 11

18. Nilai β terbesar sehingga deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^{\beta}$$

divergen adalah ...

- (a) $\frac{1}{3}$
- (b) $\frac{1}{2}$
- (c) 1
- (d) 2

19. Nilai jumlahan deret takhingga

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2 - 1} + \frac{2 \cdot 3^n}{5^n}\right)$$

adalah ...

- (a) $\frac{19}{5}$
- (b) $\frac{24}{5}$
- (c) 5

(d) 6

20. Deret Maclaurin dari fungsi

$$f(x) = \frac{3+x}{2-2x^2}$$

adalah ...

- (a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \dots$
- (b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{2}x^3 + \dots$
- (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \dots$
- (d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \dots$

21. Nilai $f(0,0)$ agar fungsi

$$f(x,y) = \ln \left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

kontinu di titik asal adalah ...

- (a) e
- (b) $\ln 1$
- (c) e^2
- (d) $\ln 3$

22. Diketahui segitiga dengan sisi-sisi a , b , dan c . Sudut A , B , dan C berturut-turut merupakan sudut di hadapan sisi a , b , dan c . Jika $\frac{\partial A}{\partial a}$ menyatakan fungsi laju perubahan sudut A terhadap sisi a maka jumlah laju perubahan sudut A terhadap masing-masing sisi segitiga tersebut adalah ...

- (a) $\frac{(a+b+c)+(b+c) \cos A}{bc \sin A}$
- (b) $\frac{(a-b-c)+(b+c) \cos A}{bc \sin A}$
- (c) $\frac{(a-b-c)+(b+c) \sin A}{bc \cos A}$
- (d) $\frac{(a+b+c)+(b+c) \sin A}{bc \cos A}$

23. Selisih nilai maksimum dengan nilai minimum dari fungsi

$$f(x,y) = x^2 - 4xy - 2y^2$$

pada daerah $x^2 + y^2 \leq 5$ adalah ...

- (a) 10
- (b) 15
- (c) 20
- (d) 25

24. Misalkan fungsi $f(x, y)$ didefinisikan pada daerah tertutup $ABCD$ dengan $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(2, 2)$, dan $D(0, 2)$. Perhatikan:

(1)

$$\int_0^2 \int_0^2 f(x, y) dy dx + \int_2^{-y+4} \int_2^0 f(x, y) dx dy$$

(2)

$$\int_0^2 \int_0^2 f(x, y) dx dy + \int_2^{-y+4} \int_0^2 f(x, y) dx dy$$

(3)

$$\int_2^{-y+4} \int_0^2 f(x, y) dy dx$$

(4)

$$\int_0^2 \int_0^2 f(x, y) dx dy + \int_2^{-x+4} \int_2^4 f(x, y) dy dx$$

(5)

$$\int_0^{-y+4} \int_0^1 f(x, y) dx dy - \int_0^{-y+4} \int_1^2 f(x, y) dx dy$$

Formulasi integral lipat dua atas daerah $ABCD$ yang benar adalah ...

- (a) (1), (2), (3)
- (b) (2), (3), (4)
- (c) (2), (3), (5)
- (d) (2), (4), (5)

25. Jika volume benda yang dihitung dengan integral lipat tiga

$$\int_0^1 \int_0^{3-a-y^2} \int_a^{4-x-y^2} dz dy dx$$

adalah $\frac{4}{15}$, maka nilai a adalah ...

- (a) 1
- (b) $-\frac{16}{3}$
- (c) 2
- (d) -2

26. Misalkan $\mathbf{r}(t)$ merupakan fungsi bernilai vektor sehingga

$$f(t) = \mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)).$$

Jika $\mathbf{r}(14) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(14) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}''(14) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, dan $\mathbf{r}'''(14) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, maka nilai dari $f'(14)$ adalah ...

- (a) -12
- (b) -3
- (c) 3
- (d) 12

27. Kelengkungan kurva parametrik $\mathbf{r}(t) = (2\sqrt{2}e^t, 2\sqrt{2}te^t, t^2e^t)$ di titik $(2\sqrt{2}, 0, 0)$ adalah ...

- (a) $8\sqrt{2}$
- (b) $2\sqrt{2}$
- (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

28. Jika $f(x, y, z) = xy - yz$, maka divergensi dari gradien x^2f adalah ...

- (a) $6xy\mathbf{i} - 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$
- (b) $6xy - 2yz - x^2$
- (c) $\frac{\partial}{\partial x}(6xy - 2yz - x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 2yz - x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(6xy - 2yz - x^2)$
- (d) $(6xy\mathbf{i} - 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

29. Jika \mathcal{C} merupakan kurva $y = (x - 1)^2$ dari $(0, 1)$ ke $(1, 0)$, maka

$$\int_{\mathcal{C}} 2x \cos y \, dx - x^2 \sin y \, dy = \dots$$

- (a) 0

- (b) 1
- (c) $\frac{1}{2}$
- (d) $-\frac{1}{2}$

30. Kurva tertutup sederhana \mathcal{C} dengan arah berlawanan jarum jam yang memaksimalkan

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{3}y^3 dx + \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) dy$$

adalah ...

- (a) $x^2 + y^2 = 1$
- (b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- (c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
- (d) $x^2 + y^2 = 4$